

İNM304

ÇELİK YAPILAR-UYGULAMA

YARDIMCI MUKAVEMET KAVRAMLARI VE HESAPLAMALARI

Arş. Gör. Dr. Elif Firuze ERDİL
İnşaat Mühendisliği Bölümü, Mühendislik Fakültesi
Akdeniz Üniversitesi

ALANLARIN MOMENTİ

1. Alanların Birinci Momenti = Statik Moment

dA : Alan Elemanı

A alanının x eksenine göre birinci momenti

$$Q_x = \int_A y dA \quad (1)$$

A alanının y eksenine göre birinci momenti

$$Q_y = \int_A x dA \quad (2)$$

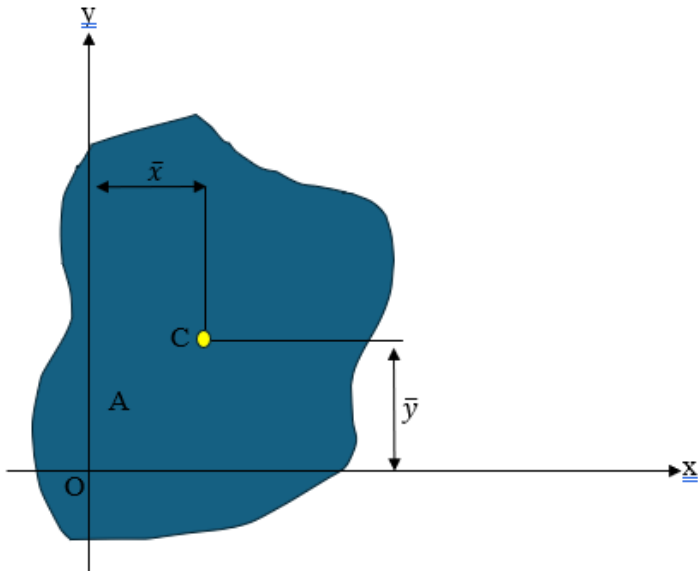
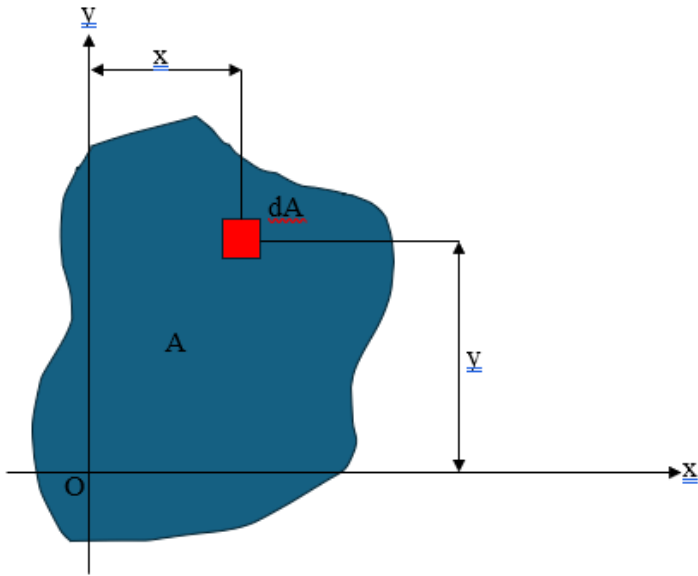
A alanının merkezi:

$$\int_A x dA = A\bar{x} \quad (3)$$

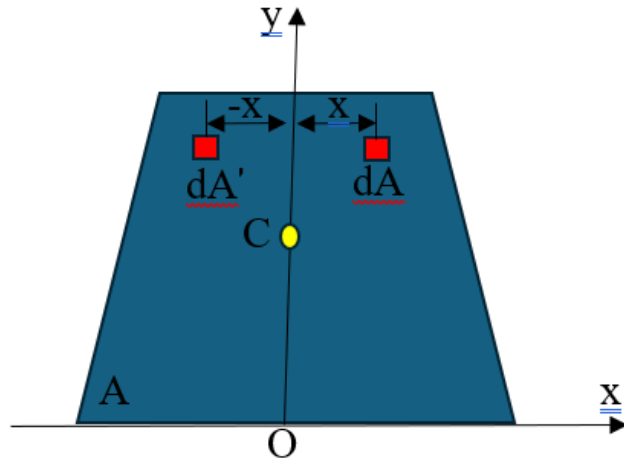
$$\int_A y dA = A\bar{y} \quad (4)$$

Denklem (1) ve (4); $Q_x = A\bar{y}$ (5)

Denklem (2) ve (3); $Q_y = A\bar{x}$ (6)



ALANLARIN MOMENTİ



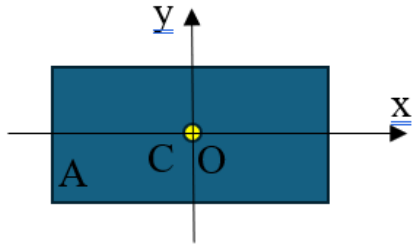
Alan bir simetri eksenine sahipse alanın söz konusu simetri eksenine göre birinci momenti sıfırdır.

Şekildeki yamuk alann simetri eksenini y olduğu için y eksenine göre birinci momenti;

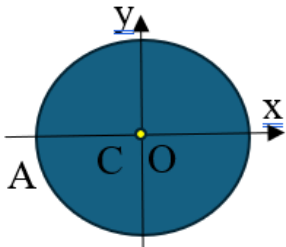
$$Q_y = \int_A x dA' - \int_A x dA = 0$$

$$Q_y = A\bar{x} = 0 \text{ olduğundan } \bar{x} = 0 \text{ olur.}$$

O halde bir A alanı simetri eksenine sahipse, C merkezi bu eksen üzerinde yer alır.



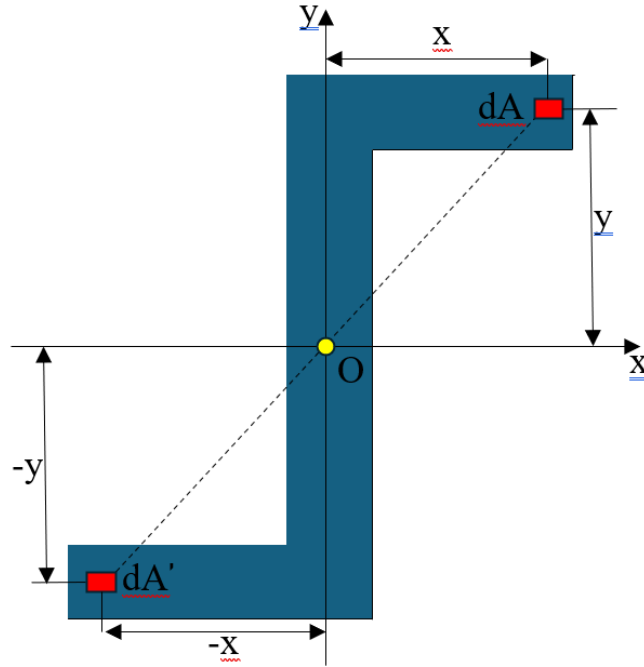
Bir dikdörtgen iki tane simetri eksenine sahip olduğu için bir dikdörtgen alanın C merkezi geometrik merkeziyle çakışır.



Benzer şekilde bir dairesel alanın merkezi de dairenin geometrik merkeziyle çakışır.

ALANLARIN MOMENTİ

O simetri eksenini ise O'dan geçen herhangi bir eksene göre birinci moment sıfırdır.



Şekilde görüldüğü üzere x ve y koordinatlı her dA alan elemanına $-x$ ve $-y$ koordinatlı bir dA' elemanının karşılık geldiğini görürüz. Bu yüzden;

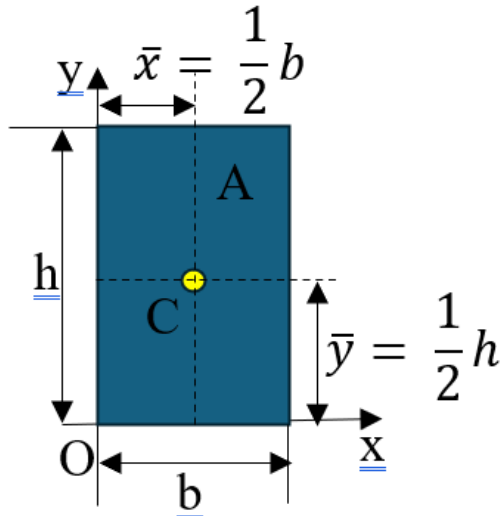
$$Q_x = \int_A y dA = 0 \rightarrow Q_x = A\bar{y} = 0 \rightarrow \bar{y} = 0$$

$$Q_y = \int_A x dA = 0 \rightarrow Q_y = A\bar{x} = 0 \rightarrow \bar{x} = 0$$

olur.

Yani alan merkezi ile alanın simetri merkezi ile çakışır. Bir alanın C merkezinin konumu simetri ile belirlenebildiği zaman bu alanın bir eksene göre momenti $Q_x = A\bar{y}$ ve $Q_y = A\bar{x}$ denklemlerinden kolayca elde edilebilir.

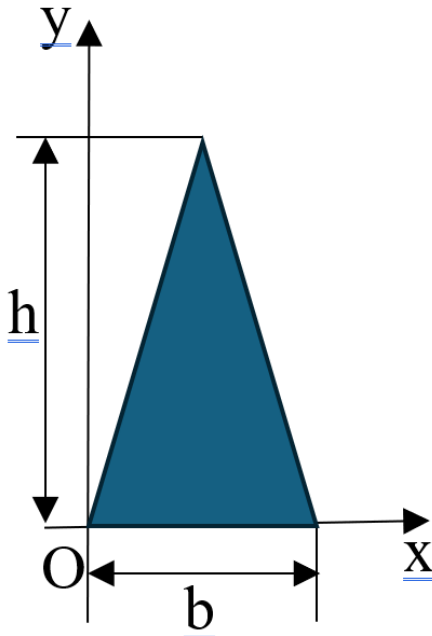
ALANLARIN MOMENTİ



$$Q_x = A\bar{y} = (b \cdot h)\left(\frac{1}{2}h\right) = \frac{1}{2}bh^2$$

$$Q_y = A\bar{x} = (b \cdot h)\left(\frac{1}{2}b\right) = \frac{1}{2}b^2h$$

ÖRNEK-1:



Şekildeki üçgensel alan için

a) Alanın x eksenine göre Q_x birinci momentini

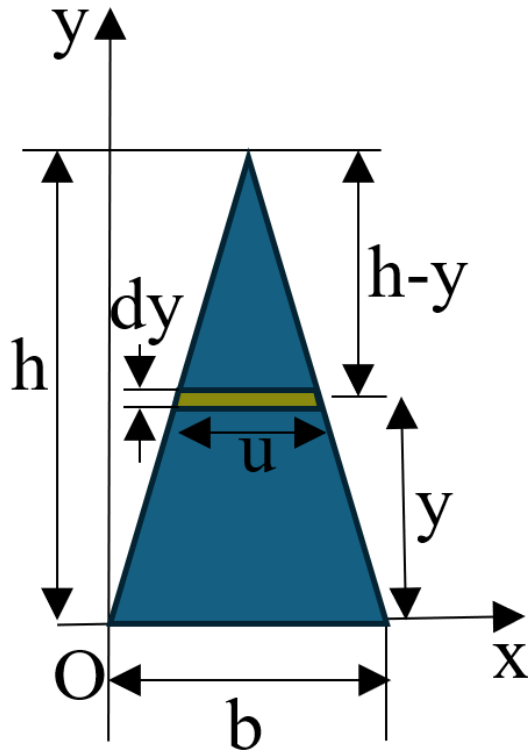
b) Alan merkezinin $\bar{y}$ ordinatını

belirleyiniz.

ALANLARIN MOMENTİ

ÇÖZÜM-1:

a) Q_x birinci moment;



Alan elemanı olarak u uzunluğunda ve dy kalınlığında bir yatay şerit seçelim.

Benzer üçgenlerden

$$\frac{u}{b} = \frac{h-y}{h} \rightarrow u = b \left(\frac{h-y}{h} \right)$$

$$dA = u \cdot dy = b \left(\frac{h-y}{h} \right) \cdot dy$$

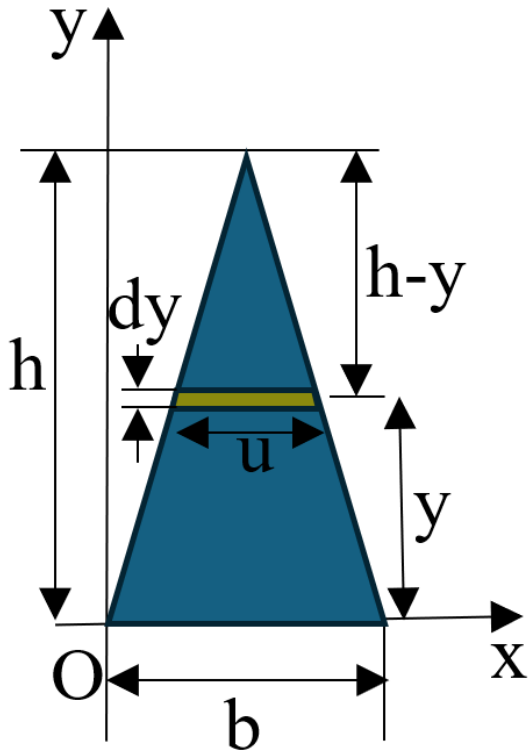
Alanın x eksenine göre birinci momenti

$$Q_x = \int_A y dA = \int_0^h y \left[b \left(\frac{h-y}{h} \right) dy \right]$$

ALANLARIN MOMENTİ

ÇÖZÜM-1:

b) Q_x birinci moment



$$Q_x = \frac{b}{h} \int_0^h (hy - y^2) dy$$

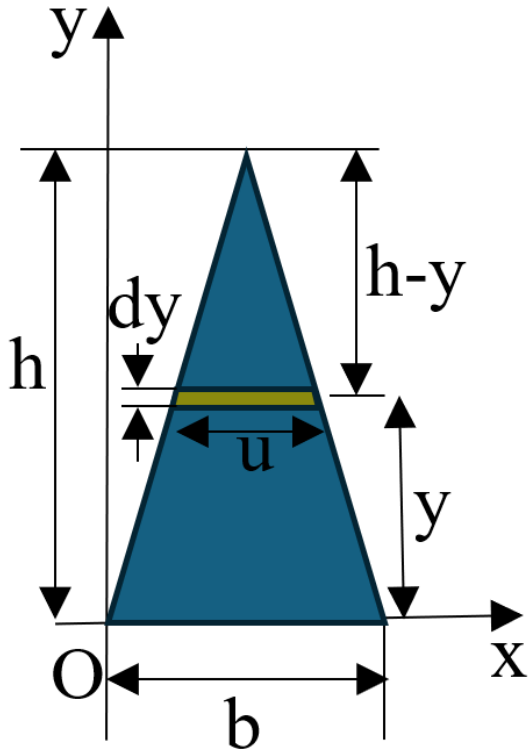
$$Q_x = \frac{b}{h} \left[h \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^h$$

$$Q_x = \frac{1}{6} b h^2$$

ALANLARIN MOMENTİ

ÇÖZÜM-1:

b) Merkezin ordinatı



$$Q_x = A\bar{y}$$

$$A = \frac{1}{2}bh$$

olduğunu dikkate alırsak

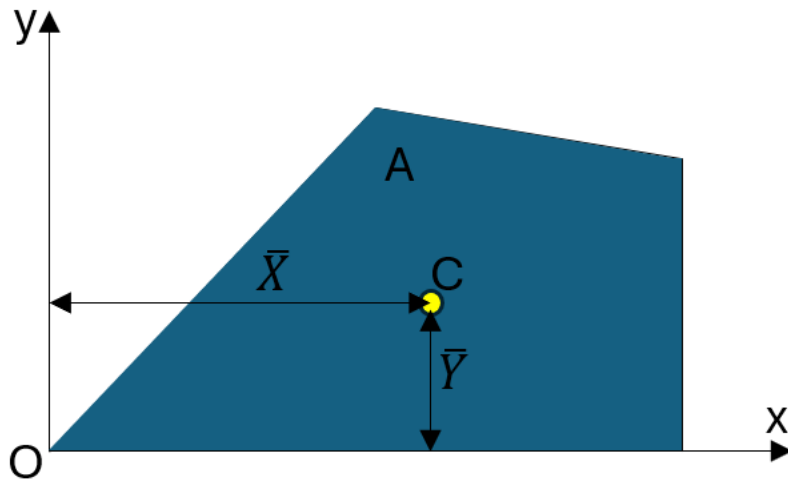
$$\frac{1}{6}bh^2 = \left(\frac{1}{2}bh\right)\bar{y}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{3}h$$

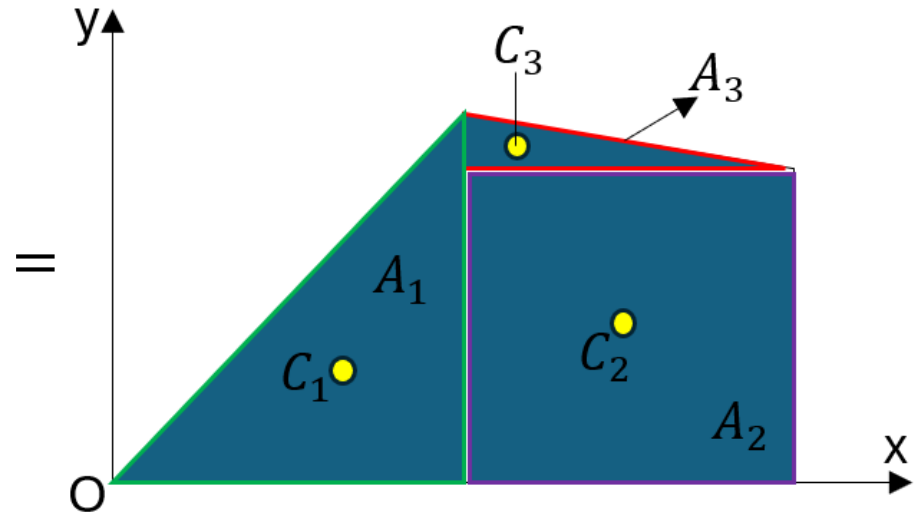
ALANLARIN MOMENTİ

2. Bileşik Alanların Birinci Momentinin ve Merkezinin Belirlenmesi

Yamuk alan



Basit geometrik şekillere ayrılmış hali



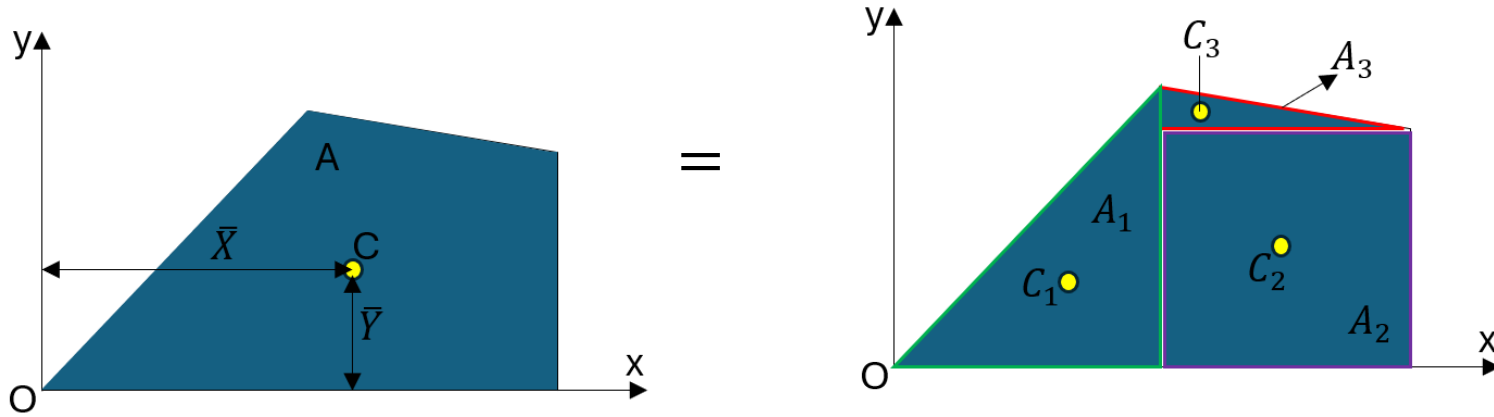
$$Q_x = \int_A y dA = \int_{A_1} y dA + \int_{A_2} y dA + \int_{A_3} y dA$$

$$Q_x = A_1 \bar{y}_1 + A_2 \bar{y}_2 + A_3 \bar{y}_3$$

$$Q_x = \sum a_i y_i \quad (7)$$

$$Q_y = \sum a_i x_i \quad (8)$$

ALANLARIN MOMENTİ



A bileşik alanın C merkezinin $\bar{X}$ koordinatını elde etmek için

$Q_y = A\bar{X}$ yazarsak;

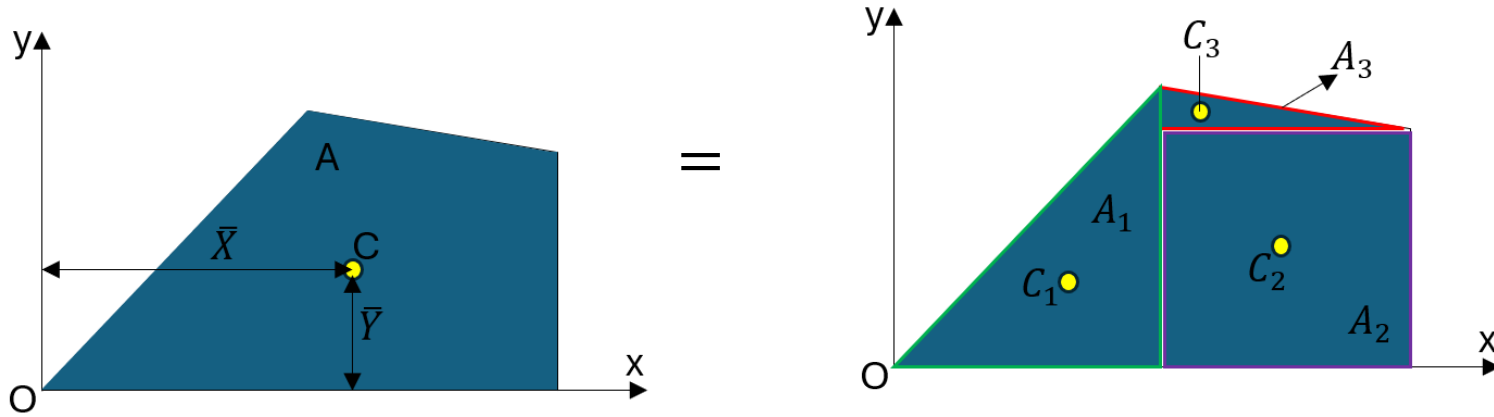
$$A\bar{X} = \sum_i A_i \bar{x}_i$$

$\bar{X}$ 'i çözer ve A_i alanlarının toplamının A alanına eşit olduğunu dikkate alırsak

$$A = \sum_i A_i$$

$$A\bar{X} = \sum_i A_i \bar{x}_i \rightarrow \sum_i A_i \bar{X} = \sum_i A_i \bar{x}_i \rightarrow \bar{X} = \frac{\sum_i A_i \bar{x}_i}{\sum_i A_i} \quad (9)$$

ALANLARIN MOMENTİ



A bileşik alanın C merkezinin $\bar{Y}$ koordinatını elde etmek için

$Q_x = A\bar{Y}$ yazarsak;

$$A\bar{Y} = \sum_i A_i \bar{y}_i$$

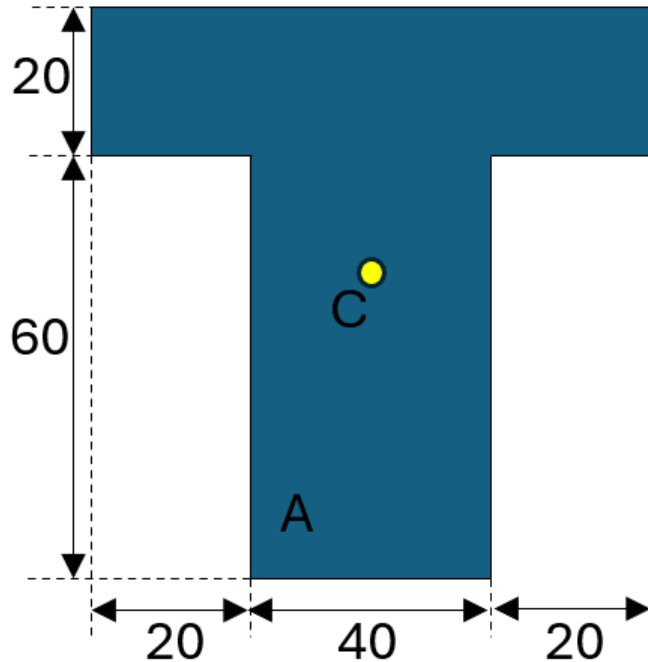
$\bar{Y}$ 'yi çözer ve A_i alanlarının toplamının A alanına eşit olduğunu dikkate alırsak

$$A = \sum_i A_i$$

$$A\bar{Y} = \sum_i A_i \bar{y}_i \rightarrow \sum_i A_i \bar{Y} = \sum_i A_i \bar{y}_i \rightarrow \bar{Y} = \frac{\sum_i A_i \bar{y}_i}{\sum_i A_i} \quad (10)$$

ALANLARIN MOMENTİ

ÖRNEK-2:



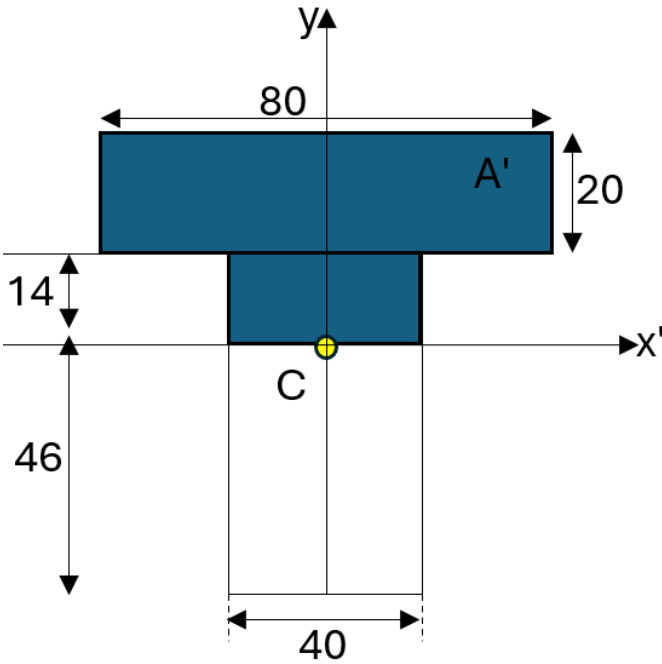
Şekildeki A alanının C merkezinin konumunu belirleyiniz.

(Birimler mm cinsindendir.)

CEVAP: $\bar{Y} = 46 \text{ mm}$

ALANLARIN MOMENTİ

ÖRNEK-3: Şekildeki A' alanının x' eksenine göre birinci momentini belirleyiniz.

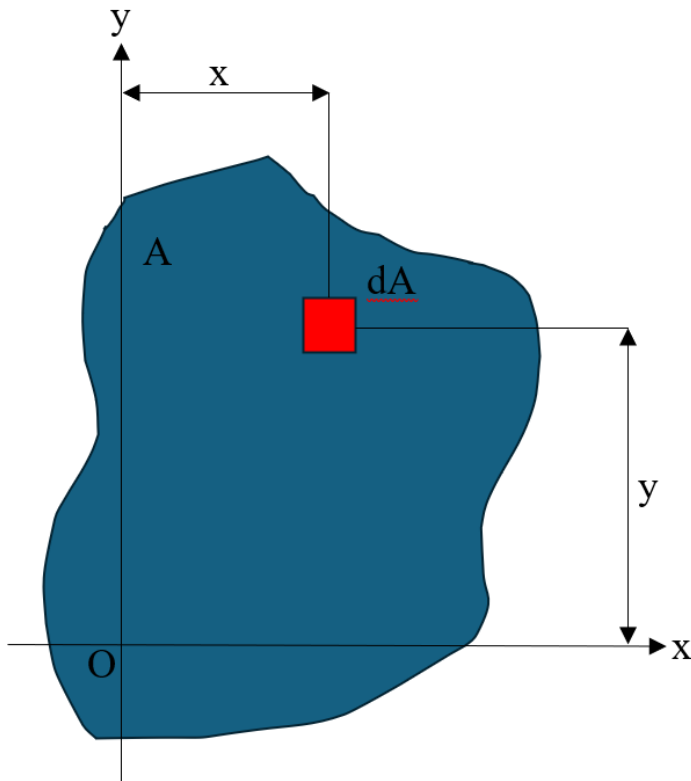


CEVAP:

$$Q_{x'} = 42.3 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

ALANLARIN MOMENTİ

3. Alanların İkinci Momenti = Atalet (Eylemsizlik) Momenti



dA : Alan Elemanı

A alanının x eksenine göre ikinci momenti

$$I_x = Q_x y$$

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad (11)$$

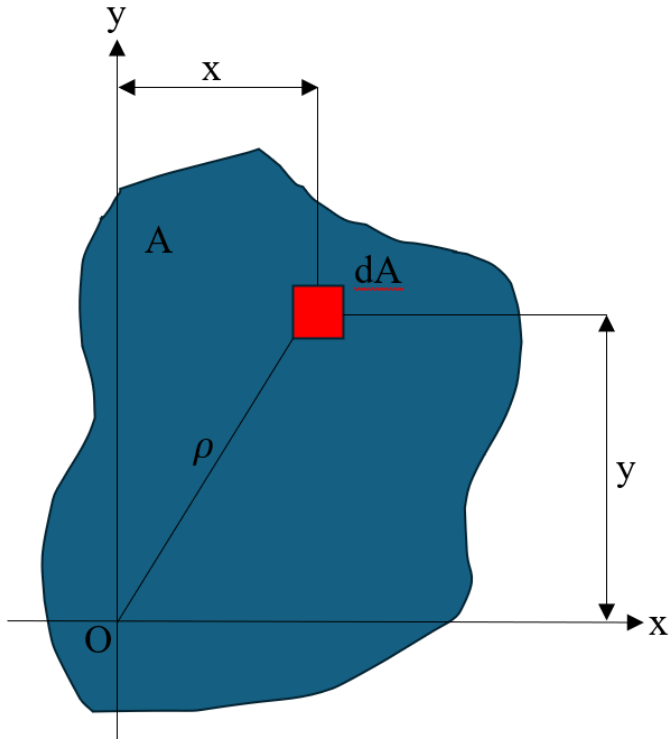
A alanının y eksenine göre ikinci momenti

$$I_y = Q_y x$$

$$I_y = \int_A x^2 dA \quad (12)$$

ALANLARIN MOMENTİ

Kutupsal Atalet (Eylemsizlik) Momenti



$$J_o = \int_A \rho^2 dA \quad (13)$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

$$J_o = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA$$

$$J_o = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA$$

$$J_o = I_x + I_y \quad (14)$$

ALANLARIN MOMENTİ

Atalet (Eylemsizlik) Yarıçapı

A alanının x eksenine göre eylemsizlik yarıçapı i_x ise

Eylemsizlik Momenti

$$I_x = i_x^2 A$$

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad (15)$$

$$I_y = i_y^2 A$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad (16)$$

O orijinine göre

$$J_o = i_o^2 A$$

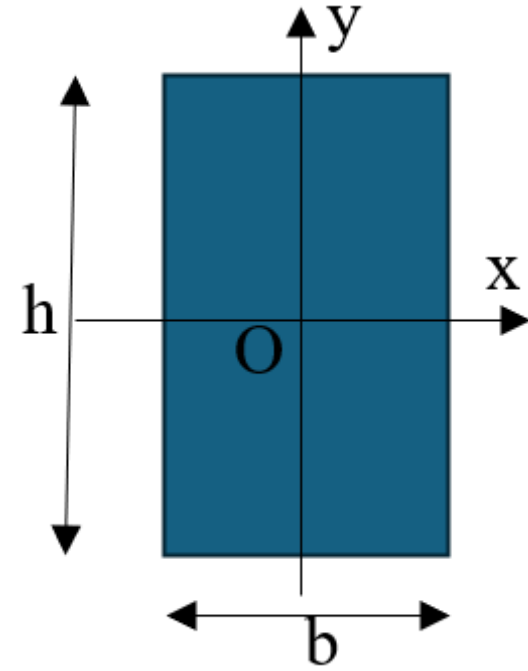
$$J_o = I_x + I_y$$

$$i_o^2 A = i_x^2 A + i_y^2 A$$

$$i_o^2 = i_x^2 + i_y^2 \quad (17)$$

ALANLARIN MOMENTİ

ÖRNEK-4:



Dikdörtgen alan için

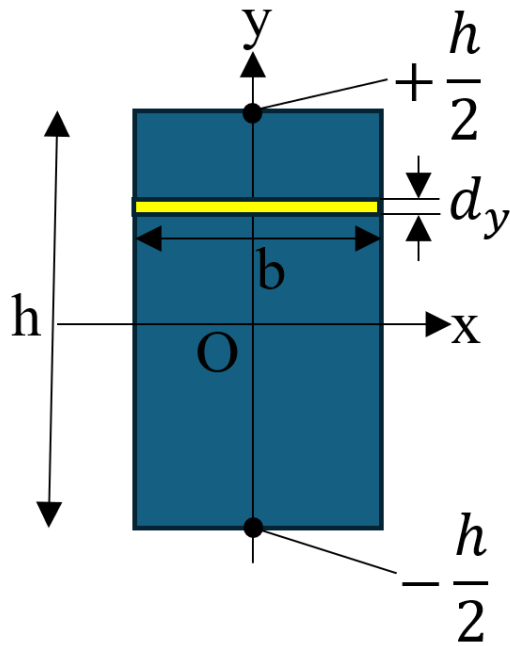
- a) Alanın x eksenine göre atalet momentini
- b) Karşı gelen i_x atalet yarıçapını

belirleyiniz.

ALANLARIN MOMENTİ

ÇÖZÜM-4:

a) x eksenine göre atalet momenti, I_x



Alan elemanı olarak b uzunluğunda ve d_y kalınlığında bir yatay şerit seçelim. Şerit üzerindeki bütün noktalar x ekseninden aynı y kadar mesafede olduğundan şeridin x eksenine göre atalet momenti;

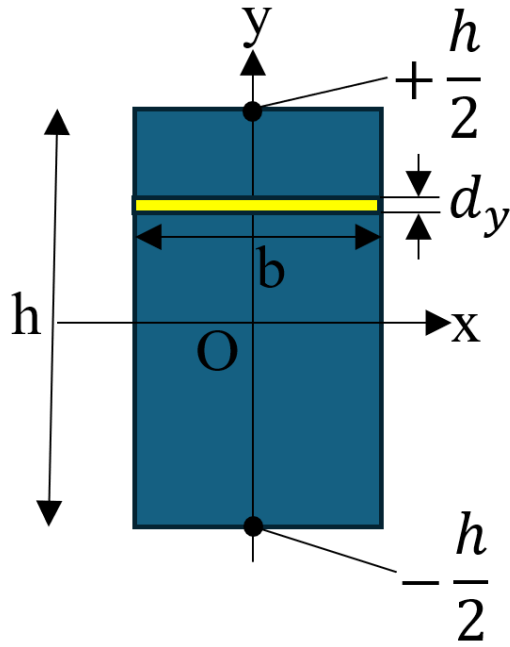
$$dI_x = y^2 dA = y^2 (b d_y)$$

$y = -\frac{h}{2}$ 'den $y = +\frac{h}{2}$ 'ye kadar integral alarak

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 (b d_y) = \left[\frac{1}{3} b y^3 \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

ALANLARIN MOMENTİ

ÇÖZÜM-4:



$$I_x = \frac{1}{3} b \left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right)$$

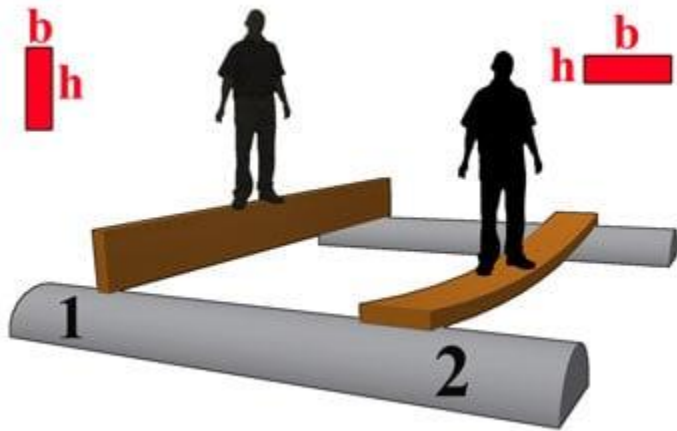
$$I_x = \frac{1}{12} b h^3$$

b) atalet yarıçapı, i_x

$$I_x = i_x^2 A$$

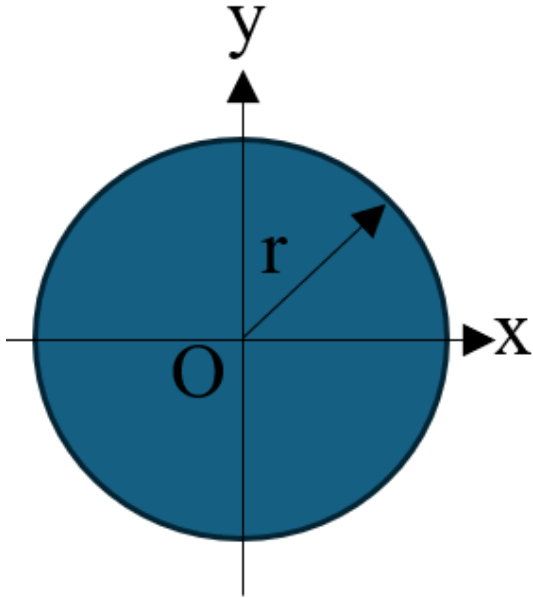
$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$i_x = \frac{h}{\sqrt{12}} \text{ (Dikdörtgen kesit için)}$$



ALANLARIN MOMENTİ

ÖRNEK-5:



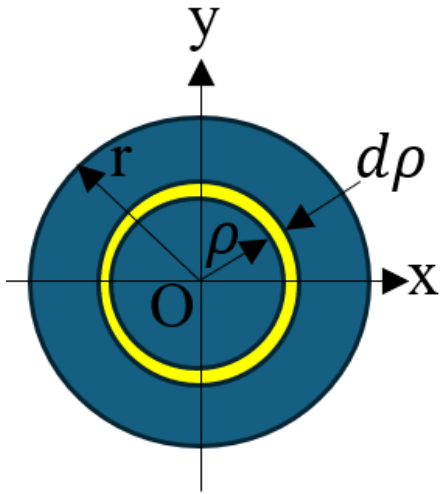
Dairesel alan için

- a)* J_o kutupsal atalet momentini
- b)* I_x ve I_y atalet momentlerinin hesaplayınız.

ALANLARIN MOMENTİ

ÇÖZÜM-5:

a) J_o kutupsal atalet momenti



Alan elemanı olarak ρ yarıçapında ve $d\rho$ kalınlığında bir halka seçelim. Halka üzerindeki bütün noktalar O orijininin aynı ρ kadar mesafede bulunur.

Halkanın kutupsal atalet momenti

$$dJ_o = \int_A \rho^2 dA = \rho^2 (2\pi \rho d\rho) \text{ olur.}$$

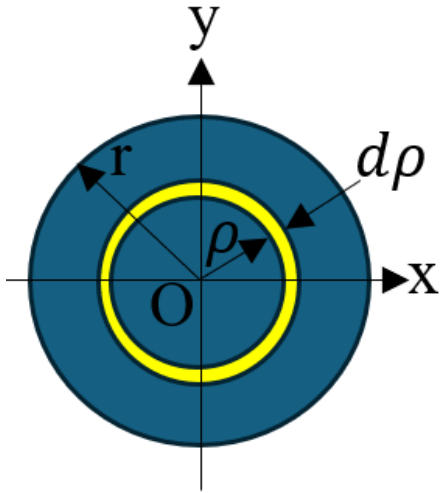
0'dan r'ye kadar integrasyonla

$$J_o = \int_A \rho^2 dA = \int_0^r \rho^2 (2\pi \rho d\rho) = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{1}{2} \pi r^4$$

ALANLARIN MOMENTİ

ÇÖZÜM-5:

b) I_x ve I_y atalet momentleri



Dairesel alanın simetrikliğinden dolayı

$$I_x = I_y$$

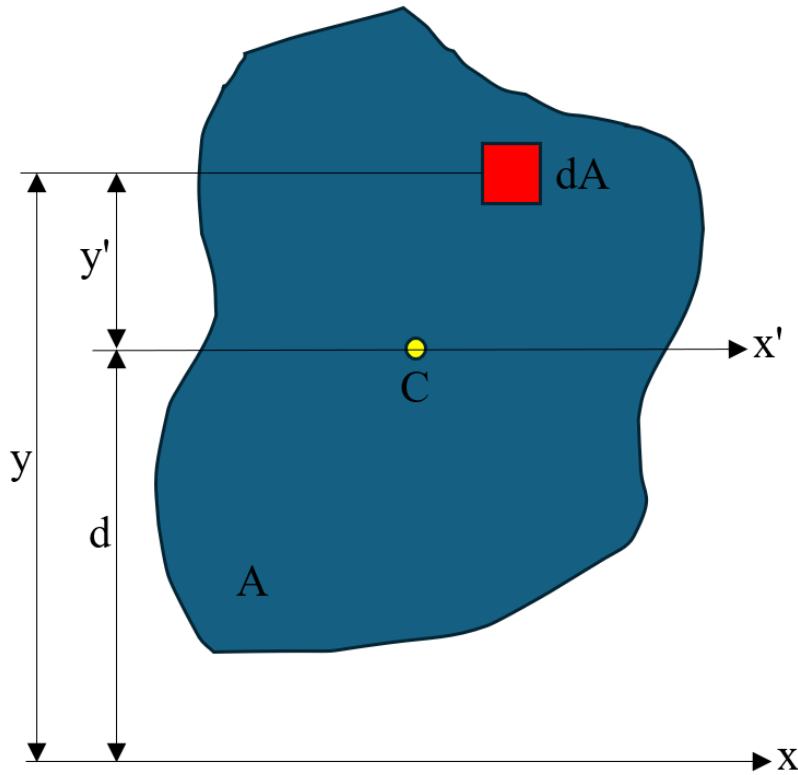
$$J_o = I_x + I_y = 2I_x$$

$$\frac{1}{2}\pi r^4 = 2I_x$$

$$I_x = I_y = \frac{1}{4}\pi r^4$$

ALANLARIN MOMENTİ

4. Paralel Eksen Teoremi



Bir A alanının x eksenine göre I_x atalet momentini göz önüne alalım.

Bir dA alan elemanının bu eksene olan uzaklığı y ise

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad \text{olur.}$$

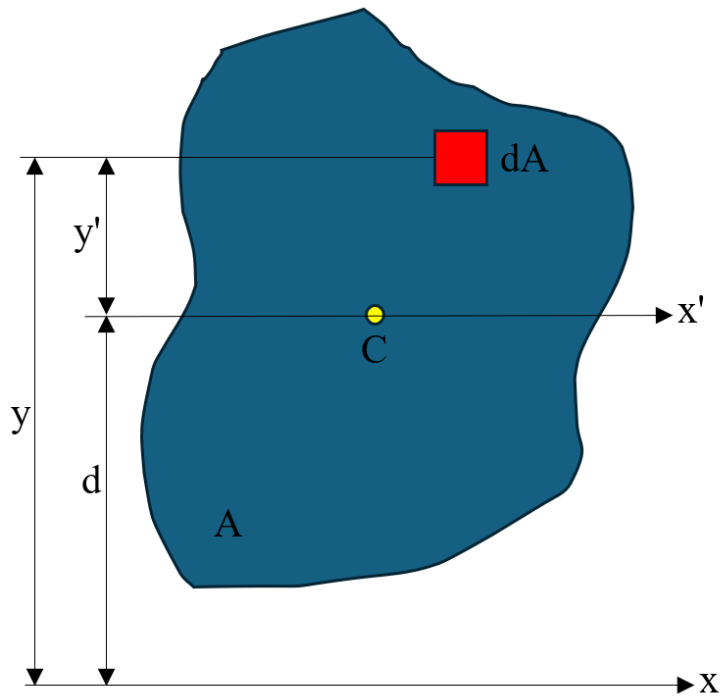
x': merkezi eksen (yani C alan merkezinden geçen eksen),

dA: alan elemanı

y': dA alan elemanının x' eksenine olan uzaklığı

d: x ve x' eksenleri arasındaki uzaklık

ALANLARIN MOMENTİ



$$y = y' + d$$

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A (y' + d)^2 dA$$

$$I_x = \int_A y'^2 dA + 2d \int_A y' dA + \int_A d^2 dA \quad (18)$$

$$I_x = \underbrace{\int_A y'^2 dA}$$

Alanın x' eksenine göre I_x ' atalet momenti

$$+ \underbrace{2d \int_A y' dA}_{\text{0}}$$

Alanın x' eksenine göre M_x ' statik momenti

$$+ \int_A d^2 dA$$

C alan merkezi bu eksen üzerinde bulunduğundan sıfıra eşittir.

ALANLARIN MOMENTİ

$$I_x = \bar{I}_x' + Ad^2 \quad (19)$$

$$I_y = \bar{I}_y' + Ad^2 \quad (20)$$

$$J_o = \bar{J}_c' + Ad^2 \quad (21)$$



Alanın C merkezine göre

Keyfi bir O noktasına göre

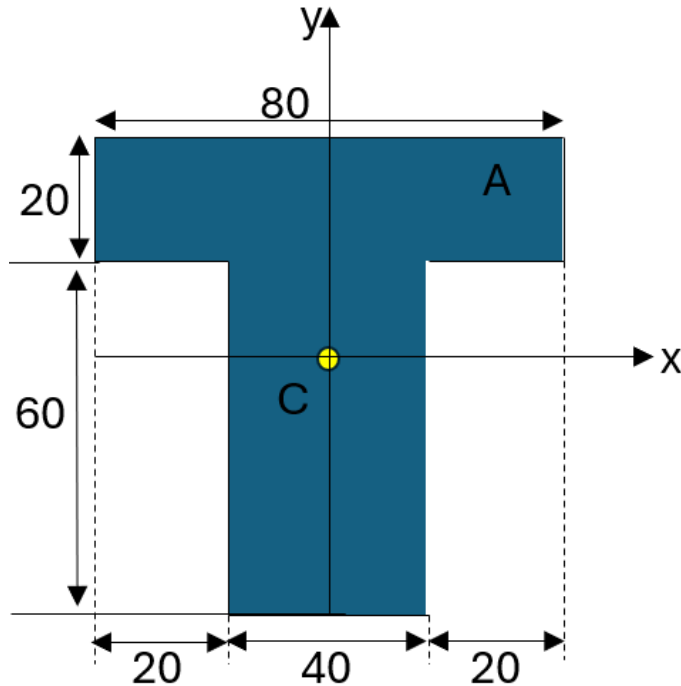
ALANLARIN MOMENTİ

5. Bileşik Alanların Atalet Momenti

Çok sayıdaki A_1, A_2 vs. parçalarından oluşan bir A bileşik alanını göz önüne alırsak, A 'nın atalet momentini temsil eden integral, A_1, A_2 vs. üzerinden alınan integrallerin toplamı olarak yazılabildiğinden A 'nın bir eksene göre atalet momenti A_1, A_2 vs. alanlarının aynı eksene göre atalet momentlerinin toplanmasıyla elde edilir. Ancak bu alanların atalet momentlerini toplamadan önce, her bir alanın atalet momentinin istenilen eksene göre ifade edilmesi için paralel eksen teoremi kullanılmalıdır.

ALANLARIN MOMENTİ

ÖRNEK-6:



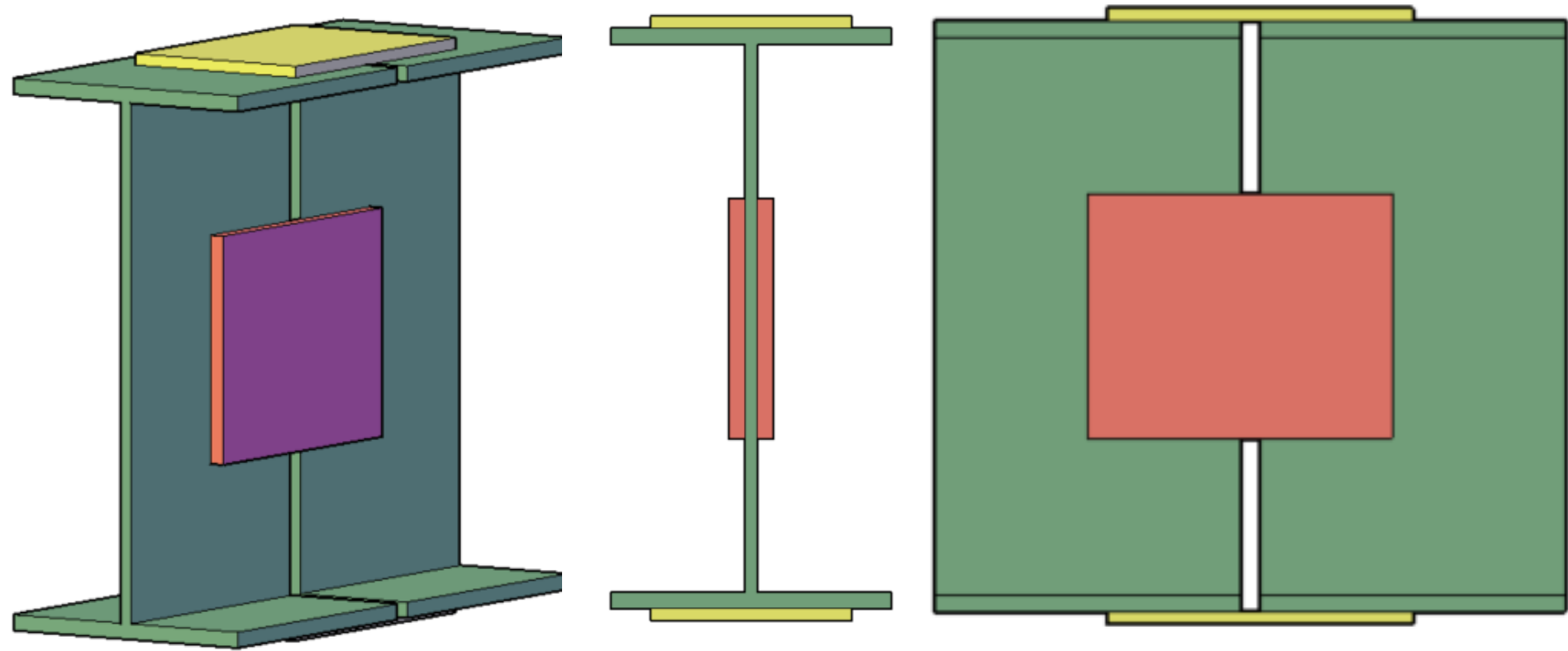
Şekildeki A alanının x merkezi eksenine göre $\bar{I}_x$ atalet momentini belirleyiniz.

(Birimler mm cinsindendir.)

CEVAP: $(\bar{I}_x) = 2.31 \times 10^4 \text{ mm}^4$

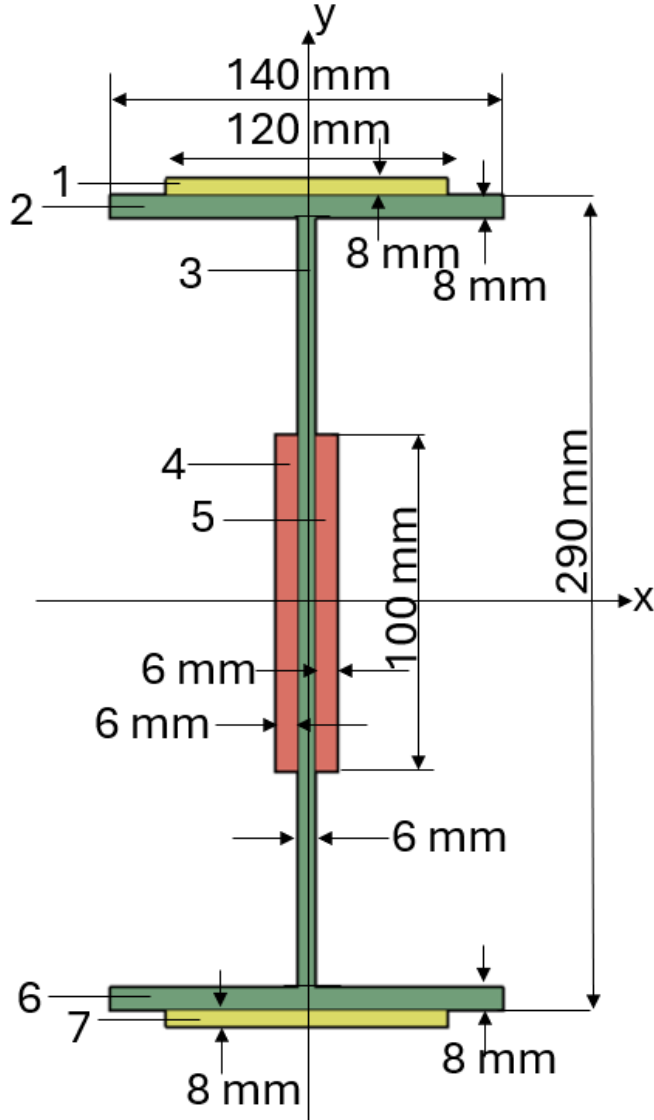
ALANLARIN MOMENTİ

ÖRNEK-7:



ALANLARIN MOMENTİ

ÖRNEK-7:



Şekildeki kesitin x merkezi eksenine göre I_x atalet momentini ve i_x atalet yarıçapını belirleyiniz.

(Birimler mm cinsindendir.)

Cevap: $I_x = 9846.7 \text{ cm}^4$

$i_x = 1.185 \text{ cm}$